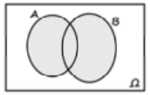
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- **Πείραμα τύχης** ονομάζεται κάθε πείραμα το οποίο μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες και του οποίου δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα.
- **Δειγματικός χώρος** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Συμβολίζεται συνήθως με Ω.
- **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα του πειράματος τύχης. Δεχόμαστε ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο ($\varnothing$) που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το καινό είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.
- **Απλό** ονομάζεται ένα ενδεχόμενο όταν έχει ένα μόνο στοιχείο.
- **Σύνθετο** ονομάζεται ένα ενδεχόμενο όταν έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.
- Ένα ενδεχόμενο λέμε ότι **πραγματοποιείται** αν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης είναι στοιχείο του ενδεχομένου.
- **Βέβαιο ενδεχόμενο** λέγεται ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης γιατί το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης θα ανήκει στο Ω.
- Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται **ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα**, όταν δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \varnothing$

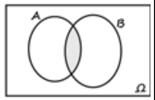
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

- $A' = \{\chi \in \Omega \,/\, \chi \notin A\}$: Δεν πραγματοποιείται το Α
- $A \cup B = \{\chi \in \Omega \,/\, \chi \in A \text{ ή } \chi \in B\}$



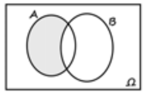
Πραγματοποιείται το Α ή το Β
Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β

- $A \cap B = \{\chi \in \Omega \,/\, \chi \in A \text{ και } \chi \in B\}$



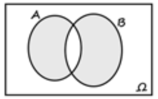
Πραγματοποιείται το Α και το Β
Πραγματοποιούνται τα Α και Β ταυτόχρονα

- $A - B = A \cap B' = \{\chi \in \Omega \,/\, \chi \in A \text{ και } \chi \notin B\}$



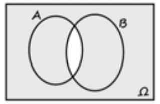
Πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β
Πραγματοποιείται μόνο το Α.

- $(A-B) \cup (B-A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') = \{\chi \in \Omega \,/\, (\chi \in A \text{ και } \chi \notin B) \text{ ή } (\chi \in B \text{ και } \chi \notin A)\}$



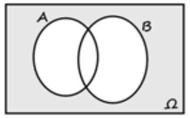
Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α, Β
Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α, Β

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$



Δεν πραγματοποιείται το Α ή δεν πραγματοποιείται το Β
Τουλάχιστον ένα από τα Α και Β δεν πραγματοποιείται
Το πολύ ένα από τα Α , Β πραγματοποιείται
Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α, Β

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$



Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β
Δεν πραγματοποιείται το Α και δεν πραγματοποιείται το Β

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ή ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΟΜΑΛΟΤΗΤΑ

Έστω ένα πείραμα τύχης που εκτελείται ν φορές και ότι το ενδεχόμενο Α εμφανίζεται κ φορές. **Σχετική συχνότητα** του ενδεχομένου Α ονομάζεται το πηλίκο $f_A = \frac{\kappa}{\nu}$.

Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε τους ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα.

ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Έστω Ω πεπερασμένος δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και Α ένα ενδεχόμενο του Ω. Ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Είναι : $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$, $\quad P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$

και για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0 \le P(A) \le 1$.

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

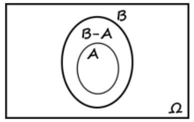
Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν: $0 \le P(\omega_i) \le 1$ και $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_\nu) = 1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$. Ως πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\} \ne \varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \ldots + P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου ($\varnothing$) ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing) = 0$.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

- Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
- $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
- $P[(A \cup B)'] = P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$
- $P[(A \cap B)'] = P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$

- Αν $A \subseteq B$ τότε:
  - $P(A) \le P(B)$
  - $A \cap B = A$ άρα $P(A \cap B) = P(A)$
  - $A \cup B = B$ άρα $P(A \cup B) = P(B)$
  - $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)$



- Είναι $\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B \subseteq \Omega$ άρα
$$0 = P(\varnothing) \le P(A \cap B) \le P(A), P(B) \le P(A \cup B) \le P(\Omega) = 1$$
- $\max\{P(A), P(B)\} \le P(A \cup B) \le 1$
- $P(A \cup B) \le 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le 1 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le 1$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) \ge P(A) + P(B) - 1$$

Άρα: $\max\{P(A) + P(B) - 1, 0\} \le P(A \cap B) \le \min\{P(A), P(B)\}$

Παραδείγματα:

1. Μια μηχανή παράγει εξαρτήματα τα οποία μπορεί να είναι αποδεκτά με πιθανότητα 88% ή να είναι ελαττωματικά έχοντας λάθος μέγεθος με πιθανότητα 8% ή να

έχουν λάθος χρώμα με πιθανότητα 7%.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγόμενο εξάρτημα

α) να είναι ελαττωματικό.

β) να έχει λάθος μέγεθος και λάθος χρώμα.

γ) να έχει ακριβώς ένα λάθος.

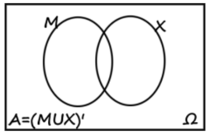
Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα

Α: Επιλέγετε αποδεκτό εξάρτημα

Μ: Επιλέγετε εξάρτημα με λάθος μέγεθος

Χ: Επιλέγετε εξάρτημα με λάθος χρώμα.



α) Ένα εξάρτημα είναι αποδεκτό ή ελαττωματικό. Άρα τα μη αποδεκτά εξαρτήματα είναι τα ελαττωματικά. Δηλαδή:

$P(\text{Επιλέγετε ελαττωματικό εξάρτημα}) = P(A') = 1 - P(A)$

$= 1 - 88\% = 12\%$

β) Ελαττωματικά είναι τα εξαρτήματα που έχουν λάθος μέγεθος ή λάθος χρώμα, άρα

$P(M \cup X) = P(\text{Επιλέγετε ελαττωματικό εξάρτημα})$

$= P(A') = 12\%$

Οπότε

$P(\text{να έχει λάθος μέγεθος και λάθος χρώμα}) = P(M \cap X)$

$= P(M) + P(X) - P(M \cup X)$

$= 8\% + 7\% - 12\% = 3\%$

γ) $P(\text{να έχει ακριβώς ένα λάθος}) = P\left[(M - X) \cup (X - M)\right]$

$= P(M) + P(X) - 2P(M \cap X)$

$= 8\% + 7\% - 2 \cdot 3\% = 9\%$

2. Έστω $\Omega = \{\kappa, \lambda, \mu, 4, 5\}$ με $\kappa, \lambda, \mu \in N$ και $\kappa < \lambda < \mu$, ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ώστε να ισχύει: $P(\kappa) = \dfrac{P(\lambda)}{2} = \dfrac{P(\mu)}{3} = \dfrac{P(4)}{4} = \dfrac{P(5)}{5}$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω.

β) Να βρείτε τα κ, λ, μ αν η συνάρτηση:

$$f(\chi) = \chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 2011$$

έχει τοπικά ακρότατα για $\chi = \kappa$ και $\chi = \mu$.

Λύση

Έστω $P(\kappa) = \dfrac{P(\lambda)}{2} = \dfrac{P(\mu)}{3} = \dfrac{P(4)}{4} = \dfrac{P(5)}{5} = \dfrac{P(6)}{6} = \rho \in \mathbb{R}$ τότε:

$P(\kappa) = \rho$, $\dfrac{P(\lambda)}{2} = \rho \Leftrightarrow P(\lambda) = 2\rho$, $\dfrac{P(\mu)}{3} = \rho \Leftrightarrow P(\mu) = 3\rho$,

$\dfrac{P(4)}{4} = \rho \Leftrightarrow P(4) = 4\rho$, $\dfrac{P(5)}{5} = \rho \Leftrightarrow P(5) = 5\rho$

και $P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) + P(4) + P(5) = 1$

$\Leftrightarrow \rho + 2\rho + 3\rho + 4\rho + 5\rho = 1$

$\Leftrightarrow \rho + 2\rho + 3\rho + 4\rho + 5\rho = 1$

$\Leftrightarrow 15\rho = 1 \Leftrightarrow \rho = \dfrac{1}{15}$

Άρα: $P(\kappa) = \dfrac{1}{15}$, $P(\lambda) = \dfrac{2}{15}$, $P(\mu) = \dfrac{3}{15}$, $P(4) = \dfrac{4}{15}$,

$P(5) = \dfrac{5}{15}$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(\chi) = 3\chi^2 - 12\chi + 9$ και

$f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow 3\chi^2 - 12\chi + 9 = 0 \Leftrightarrow \chi = 1$ ή $\chi = 3$

Άρα είναι:

χ	$-\infty$ 1	3	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	−	+
$f(\chi)$	↗	↘	↗

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $\chi = 1$ και τοπικό ελάχιστο για $\chi = 3$, επομένως $\kappa = 1$ και $\mu = 3$, αφού $\kappa < \mu$. Ο μόνος φυσικός αριθμός μεταξύ των 1 και 3 είναι το 2, επομένως $\lambda = 2$ γιατί $\kappa < \lambda < \mu$ και $\lambda \in \mathbb{N}$.

3. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

α) Είναι $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $P(A) \le P(B)$ (Λάθος)

β) Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$ (Λάθος)

γ) Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β (Λάθος)

δ) Αν $P(A) = 0{,}8$ και $P(B) = 0{,}3$ τότε

i. Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα (Λάθος)

ii. Είναι $0{,}1 \le P(A \cap B) \le 0{,}3$ (Σωστό)

ε) Αν $P(A) + P(B) = 1$ τότε $A' = B$ (Λάθος)

στ) Αν Ω δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και Α, Β ενδεχόμενα του Ω με $P(A) = P(B)$ τότε $N(A) = N(B)$ (Σωστό)

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ